Çarpımsal Belirsizlik Modellenmesi İçin Gerekli Olan Ağırlık Fonksiyonunun Oluşturulması Üzerine Bazı Yöntemlerin İncelenmesi

An Investigation of Some Methods on Constructing the Weight Function Required for Multiplicative Uncertainty Modeling

Ramazan MENAK[1], Nusret TAN[2]

[1]Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Siirt Üniversitesi
ramazanmenak@siirt.edu.tr

[2] Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
İnönü Üniversitesi
nusret.tan@inonu.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, çarpımsal belirsizliğin modellenmesi için gerekli olan ağırlık fonksiyonlarının oluşturulmasında kullanılabilecek dört yöntem incelenmiştir. Bu yöntemlerden üçü (Skogestad formülü yöntemi, Matlab/ucover fonksiyonu bilgisayar destekli yöntem, Matlab/fitmagfrd fonksiyonu bilgisayar destekli yöntem) literatürde mevcut olan yöntemlerdir. Diğer bir yöntem ise bu çalışmada önerilen ve 'uç-nokta' olarak adlandırılan yöntemdir. Yöntemler tek tek incelenmiş ve çarpımsal belirsizlik modellemesi için gerekli olan ağırlık fonksiyonunun oluşturulması adımları açıklanmıştır. Daha sonra incelenen yöntemlerin karşılaştırmaları yapılmıştır. Her yöntemin kendine has bir avantaj ve dezavantajı olduğu tespit edilmiştir. Uygun yöntem seçiminin araştırmacıya ve üzerinde çalışılan sistem tipine bağlı olduğu sonucuna varılmıştır.

Abstract

In this study, four methods that can be used to construct the weight functions required for modeling multiplicative uncertainty are examined. Three of these methods (Skogestad formula method, Matlab/ucover function computer aided method, Matlab/fitmagfrd function computer aided method) are the methods available in the literature. In this study, another method called the 'end-point' method is proposed. The methods are examined one by one and the steps of constructing the weight function required for multiplicative uncertainty modeling are explained. Then, the comparisons of the examined methods were made. It has been determined that each method has its own advantages and disadvantages. It has been concluded that the selection of the appropriate method depends on the researcher and the type of system studied.

1. Giriş

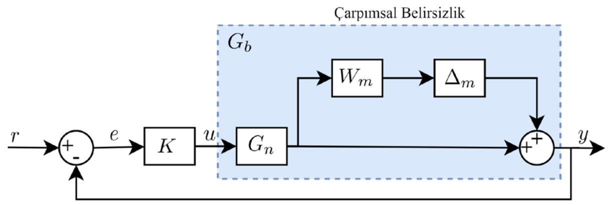
Bir kontrol sistemi tasarımında öncelikli hedef kontrol edinilen sistemin kararlılığının sağlanmasıdır. Otomatik kontrol teorisinde kararlılık süreci nominal sistem modeli üzerine dayandırılarak uygun bir kontrolörün tasarımı yapılmaktadır. Ancak, nominal model için tasarlanan kontrolör gerçek sistemde beklenen etkiyi veremeyebilir. Bunun temel sebebi sistemde var olan belirsizliklerdir. "Belirsizlik" terimi, matematiksel model olarak tasarlanan sistemin gerçek fiziksel modelden farklı olduğu anlamına gelmektedir. Tasarlanan fiziksel bir sistem modellendiğinde, gerçek sistem ile nominal olarak modellenen sistem arasında her zaman bazı farklılıklar olacaktır. Dayanıklılık kontrol teorisinde, sabit bir kontrolör tasarlanırken, bu kontrolörün belirsizliklere rağmen dayanıklı olması gerekmektedir. O halde nominal modelin tasarlanmasının yanında belirsizliklerin de sisteme dahil edilerek modellenmesi gerekmektedir. Bir sistemde belirsizlikler birden fazla etki ile gerçekleşebilmektedir. Farklı etkilerle gerçekleşen bu belirsizlikler tek bir Δ belirsizlik bloğu ile ifade edilmektedir. Δ belirsizlik bloğu, belirli bir yapıda değildir. Bundan dolayı yapısal olmayan belirsizlik adını almaktadır. Bu belirsizlik türü genel olarak sistem dinamikleri modellenememiş veya ihmal edilmiş belirsizlikleri ifade etmektedir. Δ belirsizlik bloğu frekans domeninde belirli bir norm ile (H-∞ normu) sınırlandırılmış olarak kabul edilmektedir. Dolayısıyla Δ belirsizlik bloğu, kararlı ama bilinmeyen bir transfer fonksiyon matrisi ile ifade edilmektedir. Ayrıca tüm frekans değerlerinde genliği bir ya da birden küçük olarak kabul edilir [1]. Yapılandırılmamış belirsizlikler sistem modeline toplamsal ve çarpımsal belirsizlik olarak eklenebilir. Çarpımsal belirsizlikler, toplamsal belirsizlikteki mutlak modelleme hatasından ziyade göreceli bir hata ifadesi sunduğu için dayanıklı kontrol sistemlerinde belirsizlik modeli tasarımında daha yaygın olarak kullanılmaktadır [2].

Çarpımsal belirsizlik modeli tasarımında belirsizlik modelini normalize eden bir ağırlık fonksiyonu tanımlanması gerekmektedir. Bu ağırlık fonksiyonunun genliği tüm frekanslarda çarpımsal belirsizliğinin genliğinden daha yüksek olması gerekmektedir. Öyle ki bu ağırlık fonksiyonu, robust kararlılık durumunun incelenmesinde başlıca rol üstlenmektedir. Dolayısıyla çarpımsal belirsizliği normalize eden bu ağırlık fonksiyonun uygun bir şekilde seçilmesi gerekmektedir. Ağırlık fonksiyonun seçilmesi için matematiksel bir formülasyon [3] kaynağında verilmiştir. Ancak bu formülasyon çoğu zaman belirsizlik ailesini tam olarak kapsamamaktadır. Bazı frekans değerlerinde genliği, belirsizlik ailesi genliğinin çok üzerinde ya da altında olmaktadır. Dolayısıyla formüle bazı düzeltme faktörleri eklenmesi önerilmektedir [3]. Bu durum sistemin durumuna göre işlem yükünü artırmakta ve kesin bir çözüm sağlamamaktadır. Analitik yaklaşımlar dışında bazı bilgisayar destekli (BD) yaklaşımlar da kullanılmaktadır [4]. Bu yaklaşımlar daha uygun sonuçlar vermekle birlikte sistem parametrelerine bağlı olarak ağırlık fonksiyonu hesaplama süreci zaman alıcı ve karmaşık olabilmektedir.

Bu çalışmada literatürde var olan çarpımsal belirsizlik ağırlık fonksiyonunun belirlenmesi yöntemleri açıklanmış ve bir örnek üzerinde incelenmiştir. Bunlarla birlikte parametreleri uç noktalardan oluşan, çarpımsal belirsizlik ailesinin en üst noktasını temsil eden bir ağırlık fonksiyonu tanımlama yöntemi de önerilmiştir. Önerilen bu yöntem de aynı örnek üzerinde incelenmiş ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması yapılmıştır. İncelenen yöntemlerin ve önerilen yöntemin avantaj ve dezavantajları karşılaştırılmış ve araştırmacılara tek bir kaynakta tüm yöntemlerin nasıl kullanılabileceği sunulmuştur.

2. Çarpımsal Belirsizliğin Modellenmesi

Şekil 1'de çarpımsal belirsizlik modeli blok diyagramı verilmiştir. Şekil 1'de verilen u kontrolör çıkış sinyali, y ise belirsizliğe sahip sistem modeli çıkışıdır. u ile y arasındaki transfer fonksiyonunun matematiksel ifadesi Denklem 1'de verilmektedir. Denklem 1'de G_b çarpımsal belirsizlik ailesini, G_n nominal sistem modelini, Δ_m bloğu çarpımsal belirsizlik hatasını (göreceli hata), W_m ise çarpımsal belirsizlik hatasını normalize eden bir ağırlık fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Bu ağırlık fonksiyonu kararlı ve uygun bir transfer fonksiyonu olmalıdır.



Şekil 1: Çarpımsal belirsizlik modeli içeren geri beslemeli kontrol sistemi blok diyagramı

$$G_b = G_n(1+W_m\Delta_m), \quad \|\Delta_m\|_\infty \le 1 \Rightarrow |\Delta_m| \le 1 \tag{1}$$

Denklem 1'deki Δ_m bloğu belirsizliği temsil etmekle birlikte yapısı bilinmeyen ancak kararlı ve H-∞ normu 1' den küçük kabul edilen bir yapıdır. Dolayısıyla aşağıdaki Denklem (2) ifadesi yazılabilir.

$$\frac{1}{W_m}\frac{G_b - G_n}{G_n} \le \Delta_m \tag{2}$$

Denklem (2)'de eşitsizliğin sol tarafının H-∞ normu, $\|\Delta_m\|_\infty \le 1$ ifadesinden dolayı 1'e küçük ve eşit olabilmektedir. Dolayısıyla Denklem (3) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left\|\frac{1}{W_m}\frac{G_b - G_n}{G_n}\right\|_\infty \le 1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{W_m}\frac{G_b - G_n}{G_n}\right| \le 1 \tag{3}$$

Denklem (3), Denklem (4) olarak revize edilirse, W_m ifadesi tüm frekans değerlerinde genliği çarpımsal belirsizlik hatasının genliğinden daha büyük olması gerektiği sonucuna varılmaktadır.

$$\left\|\frac{G_b - G_n}{G_n}\right\|_\infty \le W_m \;\Rightarrow\; \left|\frac{G_b - G_n}{G_n}\right| \le W_m \tag{4}$$

3. Çarpımsal Belirsizlik Ağırlık Fonksiyonu Belirleme Yöntemleri

Bu çalışmada çarpımsal belirsizlik ağırlık fonksiyonunun seçilmesi amacıyla 4 yöntem incelenmiştir. Bunlardan 3 tanesi literatürde var olan bir tanesi de bu çalışmada önerilen 'uç nokta' yöntemidir.

3.1. Skogestad formülü yöntemi

Bu formül, çarpımsal belirsizlik gibi yüksek frekans değerlerinde modellenemeyen sistem dinamikleri durumlarında kullanılmak üzere Skogestad tarafından önerilmiştir [3]. Formül Denklem (5)'te verilmiştir.

$$Wm\_Skogestad(s) = \frac{\tau s + r_0}{\left(\tau / r_\infty\right)s + 1} \tag{5}$$

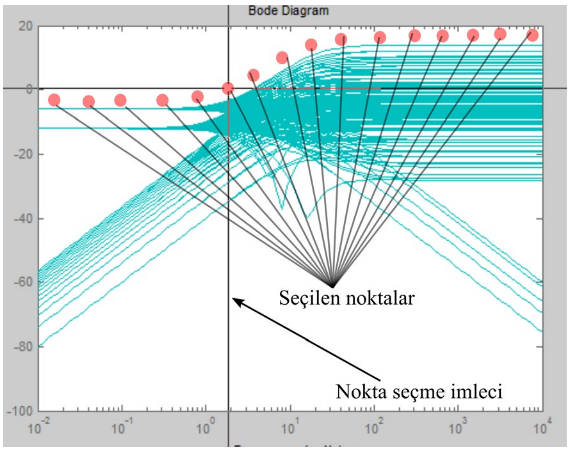
Burada r_0 göreceli hatanın düşük frekans değerlerindeki kararlı durum genliğini, r_∞ göreceli hatanın yüksek frekans değerlerindeki maksimum genliğini, $1/\tau$ ise göreceli hatanın yaklaşık olarak %100 değerine (desibel cinsinden 0 dB, gerçel değer olarak 1 değerine) ulaştığı frekans değerini ifade etmektedir.

3.2. Matlab/*ucover* fonksiyonunun kullanıldığı BD yöntemi

Bu yöntemin uygulanması için Matlab ortamında algoritma tasarımı yapılarak tüm belirsizlik ailesini temsil eden göreceli hata transfer fonksiyonlarının frekans-genlik (Bode zarfları) çizilir. Daha sonra *ucover* komutu kullanılarak göreceli hatanın üst noktalarını çizen bir ağırlık fonksiyonu otomatik olarak kullanıcıya sunulur [4]. Bu komut ile ilgili detaylı bilgi [4] kaynağından bulunabilir.

3.3. Matlab/*fitmagfrd* fonksiyonunun kullanıldığı BD yöntemi

Bu komut için yine algoritma kullanılarak göreceli hata transfer fonksiyonlarının Bode zarfları çizilir. Burada *fitmagfrd* kullanılarak, *ucover* komutunda farklı olarak otomatik çizim yapmak yerine kullanıcının tanımladığı seçme noktası sayısı kadar hata transfer fonksiyonlarının üst tarafından noktalar tıklatılarak seçim yapılır [2]. Daha sonra Matlab, seçilen bu noktaları birleştirerek bir transfer fonksiyonu oluşturmaktadır. Elde edinilen bu transfer fonksiyonu, ağırlık fonksiyonu olarak kullanılmaktadır. *fitmagfrd* komutu çalıştırılmadan önce *ginput* komutu ile Şekil 2'de görüldüğü gibi bilgisayar faresi kullanıcının denetiminde olan bir imleç ile istenilen noktalara basılmak suretiyle seçim yapılır. Tercihen açık mavi renkli olan belirsizlik ailesinin üst noktalarında tıklanma yapılarak frekans-genlik noktaları seçilir. Daha sonra seçilen bu noktalar *fitmagfrd* komutu ile otomatik olarak birleştirilerek bir ağırlık fonksiyonu meydana gelmektedir.



Şekil 2: *ginput* komutu kullanılarak çıkan ekranda kullanıcıya sunulan imleç ile üst nokta seçimi yapılması

3.4. Uç nokta yöntemi (Önerilen yöntem)

Bu çalışmada literatürdeki yöntemlere ek olarak sistem parametrelerin uç noktaları kullanılarak bir ağırlık fonksiyonu tanımlama yöntemi sunulmuştur. Bir transfer fonksiyonu sisteminde parametre değerleri belirli aralıklar ile değişebilmektedir. Böyle sistemler için Denklem (4)'teki eşitsizliğin sol tarafında var olan transfer fonksiyonu sistemi, belirsiz parametre sayısı ve aralığından kaynaklı olabilecek maksimum sayıda belirsizlik ailesine sahip transfer fonksiyonları sistemi ortaya çıkarmaktadır. Ancak, meydana gelebilecek tüm transfer fonksiyonları sistemleri yerine, transfer fonksiyonlarındaki tüm parametrelerin sadece uç noktaları kullanılarak belirsizlik ailesini yani göreceli hatayı ifade eden tek bir transfer fonksiyonu sistemi kullanılabilmektedir. Böylelikle daha az karmaşık bir tasarım yapılma imkânı doğmaktadır. Uç nokta yöntemi Denklem (6) - (8)'de verilen yapılar ile ifade edilebilir [5]. Denklem (6)'da parametre belirsizliğine sahip aralıklı bir transfer fonksiyonu sistemi verilmiş olsun. $D=\left\{d : d_i \in [\underline{d_i}, \overline{d_i}], i=0,1,2...t\right\}$ ve $N=\left\{n : n_i \in [\underline{n_i}, \overline{n_i}], i=0,1,...t\right\}$ olarak pay ve payda polinomlarının uç noktalarının alt ve üst limitlerini ifade etmektedir. Bu transfer fonksiyonun maksimum ve minimum ifadesi sırasıyla Denklem (7) ve Denklem (8) ile verilmiştir.

$$G(s,n,d)=\frac{N(s,n)}{D(s,d)}=\frac{n_t s^t + n_{t-1}s^{t-1}+...+n_0}{d_t s^t + d_{t-1}s^{t-1}+...+d_0} \qquad (6)$$

$$\max\left|G(s,n,d)\right|=\frac{\max\left|N(s,n)\right|}{\min\left|D(s,d)\right|}=\frac{\overline{n_t}s^t+\overline{n_{t-1}}s^{t-1}+...+\overline{n_0}}{\underline{d_t}s^t+\underline{d_{t-1}}s^{t-1}+...+\underline{d_0}} \qquad (7)$$

$$\min\left|G(s,n,d)\right|=\frac{\min\left|N(s,n)\right|}{\max\left|D(s,d)\right|}=\frac{\underline{n_t}s^t+\underline{n_{t-1}}s^{t-1}+...+\underline{n_0}}{\underline{\underline{d_t}}s^t+\underline{\underline{d_{t-1}}}s^{m-1}+...+\underline{\underline{d_0}}} \qquad (8)$$

Denklem (4)'ten anlaşılacağı üzere çarpımsal belirsizlik ağırlık fonksiyonu seçimi yapılırken göreceli hatanın maksimum değerlerinden daha büyük seçilmesi gerekmektedir. Dolayısıyla göreceli hatanın maksimum değerini ifade eden bir transfer fonksiyonu bulunup, ağırlık fonksiyonu bu transfer fonksiyonundan daha büyük seçilerek elde edilebilir. Bu amaç doğrultusunda uç nokta yöntemi ile elde edilen ağırlık fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$\left|\frac{\max(G_b)-G_n}{G_n}\right|=G_{relerr\_\max} \;\leq \mathrm{W}_m\_uç \qquad (9)$$

Denklem (9)'da görüldüğü gibi uç noktalardan oluşan sistem için tasarlanan transfer fonksiyonu önerilen ağırlık fonksiyonuna küçük ya da eşit olmalıdır. Dolayısıyla önerilen ağırlık fonksiyonu uç noktalardan elde edilen transfer fonksiyonundan büyük ya da eşit olmalıdır. Denklem (3) şartı sağlanması için önerilen ağırlık fonksiyonu uç noktalardan elde edilen transfer fonksiyonunun %1 oranında artırılmasıyla Denklem (10) ile ifade edilmiştir. Önerilen yöntem bir örnek üzerinden Bölüm 4'te detaylı bir şekilde incelenecektir.

$$W_m\_uç = 1.01\times G_{relerr\_\max} \qquad (10)$$

4. Örnek

Bu bölümde, verilen bir örnekle 3. bölümde anlatılan yöntemlerin uygulanması yapılmıştır. Aşağıdaki transfer fonksiyonu incelendiğinde, sistem parametreleri belirli aralıklarla değişmektedir [2].

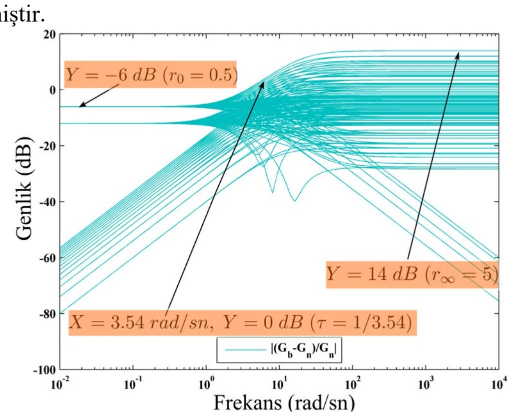
$$G(s,k,T_1,T_2)=\frac{k}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad (11)$$

Burada, k, T_1, T_2 belirsiz parametreleri temsil etmektedir. Sistemin nominal parametreleri $k_{nom} = 0.4$, $T_{1nom} = 0.2$ s, $T_{2nom} = 0.1$ s olarak verilmiştir. Sistem parametreleri %50 oranında değişime uğradığı varsayılmıştır. Dolayısıyla sistem parametreleri $k \in [0.2, 0.6]$, $T_1 \in [0.1, 0.3]$, $T_2 \in [0.05, 0.15]$ aralığında değişmektedir. Bu durum nominal sistem ile gerçek sistem arasında bazı farklılıkların oluşturduğu bir belirsizlik durumunu meydana getirmektedir. Parametrik belirsizlik durumu çarpımsal belirsizlik olarak ele alınarak aşağıdaki Denklem (12) yazılabilir. Bu aşamadan sonra verilen yöntemler ile uygun bir ağırlık fonksiyonu seçimi yapılacaktır.

$$G_b(s,k,T_1,T_2)=\frac{k_{nom}}{s(1+T_{1nom}s)(1+T_{2nom}s)}(1+W_M\Delta_M) \qquad (12)$$

4.1. Skogestad formülü yöntemi ile ağırlık fonksiyonu tanımlama

Bu yöntemin uygulanabilmesi için öncelikle Denklem (4)'teki eşitsizliğin sol tarafındaki tüm belirsizlik ailesinin bode zarfları çizdirilir. Bu işlem Çizelge (1)'de verilen Algoritma 1 yapısı ile kullanılabilir. Çizilen eğriler Şekil 3'te verildiği gibi elde edilmiştir.



Şekil 3: Skogestad formülü parametrelerinin göreceli hata transfer fonksiyonları ailesinin genlik-frekans eğrilerinin çizdirilmesiyle bulunması

Şekilde göreceli hatanın üst sınırında olacak şekilde, düşük ve yüksek frekans değerlerindeki genlik değerleri ile genliğin 1 olduğu frekans noktası belirlenmiştir. Belirlenen bu noktalar Denklem (5)'te yerine konularak ağırlık fonksiyonu elde edilmiştir. Seçilen noktalardan oluşan parametreler Denklem (5)'te yerine konularak Denklem (13) elde edilmiştir.

Çizelge 1: Belirsizlik (göreceli hata) transfer fonksiyonlarının frekans-genlik (bode zarflarının) eğrilerinin elde edilmesi (Algoritma 1)

Algoritma 1:	
1:	Parametrelerin nominal değerleri ile aralık yapısında minimum maksimum değerlerinin girilmesi
2:	Gn(knom,T1nom,T2nom) transfer fonksiyonun elde edilmesi
3:	**for** k=kmin:k_adım:kmax
4:	**for** T1=T1min:T1_adım:T1max
5:	**for** T2=T2min:T2_adım:T2max
6:	*Gb(k,T1,T2)* TF elde edilmesi
7:	*Grelerr=(Gb-Gnom)/Gnom hesaplanması*
8:	**end**
9:	**end**
10:	**end**
11:	Grelerr, Bode Zarfları Eğrilerinin çizdirilmesi

$$Wm\_Skogestad(s) = \frac{0.282s + 0.5}{(0.282/5)s + 1} \tag{13}$$

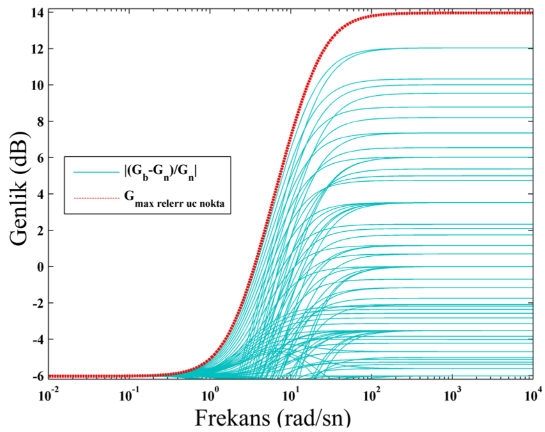
4.2. Uç nokta yöntemi ile ağırlık fonksiyonu tanımlama (Önerilen yöntem)

Uç nokta yönteminde, Denklem (9) içerisindeki *max(G_b)* ifadesinin elde edilmesi için Denklem (7) yapısı kullanılmıştır. Buna göre belirsiz parametrelere sahip transfer fonksiyonunun uç noktalardan oluşan maksimum Bode zarfı ifadesi Denklem (14)'te verilmiştir.

$$\max\left|G_b(s,n,d)\right| = \frac{\max\left|N(s,n)\right|}{\min\left|D(s,d)\right|} = \frac{0.6}{s(1+0.1s)(1+0.05s)} \tag{14}$$

Denklem (14)'teki ifade Denklem (11)'de parametreleri nominal değerlerden oluşan sistem ile beraber Denklem (9)'da yerine konulduğunda göreceli hata ailesinin en üst noktasını ifade eden bir transfer fonksiyonunun Bode zarfı elde edilmektedir. Uç noktalar ve nominal değerlerden oluşan göreceli hata transfer fonksiyonu Denklem (15)'teki gibi elde edildikten sonra önerilen ağırlık fonksiyonun tanımlanması için Denklem (3) şartı sağlanması adına Denklem (10) kullanılarak Denklem (16)' daki gibi elde edilmiştir. Şekil 4' te görüldüğü gibi önerilen uç noktalar yöntemi ile sistemden elde edilen tek bir transfer fonksiyonunun Bode zarfı (Denklem (15)) bütün belirsizlik eğrilerinin (Şekil 3'ten yakınlaştırılmış) en üst noktasını temsil edebilmektedir.

$$\begin{aligned} G_{relerr\_\max} &= \left|\frac{Denklem\ (14) - Denklem_n(11)}{Denklem_n(11)}\right| \\ G_{relerr\_\max} &= \frac{5(s+2)}{(s+20)} \end{aligned} \tag{15}$$



Şekil 4: Bütün Göreceli hata transfer fonksiyonlarının Bode zarfları ile uç noktalardan oluşan göreceli hata transfer fonksiyonunun Bode Zarfının gösterimi

$$W_m\_uç = 1.01 \times \frac{5(s+2)}{(s+20)} \tag{16}$$

Ağırlık fonksiyonu tüm belirsizlik ailesinin en üst noktalarının daha üstünde seçilmesinden dolayı, önerilen uç nokta yöntemi sonucunda elde edilen tek bir transfer fonksiyonunun Bode zarfının üstünde seçilmesi yeterli olacaktır. Bu durumda tüm belirsizlik ailesinin Bode zarflarının hepsinin çizdirilmesine gerek kalmamaktadır. Böylelikle karmaşıklığın önüne geçinmekle beraber hesaplama süreleri de oldukça azalmaktadır.

4.3. Matlab/ucover fonksiyonu BD yöntemi ile ağırlık fonksiyonu tanımlama

Ucover komutunun kullanılabilmesi için öncelikle tüm belirsizlik ailesi ve nominal sistemin elde edilmesi gerekmektedir. Bu işlemler Çizelge (1)'de verilen Algoritma 1 kullanılarak yürütülmüştür. Algoritma 1 sonucunda elde edilen tüm belirsizlik ailesi ve nominal sistem transfer fonksiyonu ile ağırlık fonksiyonunun derecesinin 1 seçilmesi suretiyle *ucover* fonksiyonuna atılmıştır. Daha sonra Matlab ortamında aşağıdaki kod satırları kullanılarak *ucover* komutuyla derecesi 1 olan bir ağırlık fonksiyonu otomatik olarak elde edilmiştir.

```
derece=1;
[P,Info] = ucover(Grelerr,Gnom,derece);
W_ucover = Info.W1;
tf(W_ucover)
```

$$W\_ucover = \frac{5.009\ s\ +\ 10.03}{s\ +\ 20.03} \tag{17}$$

4.4. Matlab/fitmagfrd fonksiyonu BD yöntemi ile ağırlık fonksiyonu tanımlama

fitmagfrd komutu Matlab ortamında frekans-genlik noktalarını toplayarak eğri uydurma suretiyle minimum fazlı durum-uzay modeli kullanarak bir transfer fonksiyonunu hesaplatmaktadır. Bu özellikten dolayı öncelikle Algoritma 1 kullanılarak göreceli hata transfer fonksiyonlarının Bode zarfları çizilir. Daha sonra kullanıcının belirlediği nokta sayısı kadar seçim yaptıracak, aşağıdaki komut çalıştırılır. Bu çalışmada 16 nokta belirlenerek Şekil 2'de gözüktüğü gibi göreceli hataların üst noktalarında değişik frekans-genlik değerlerindeki noktalar *ginput* komutu ile seçilmiştir. Seçilen bu noktalar bir *[frekans, genlik]* değerine atanmıştır. Seçilen genlik değerleri gerçel değer olduğu için bir gerçel değer-log dönüşümü formülü kullanılarak *dB* cinsinden değerler bir *cevap(i)* fonksiyonuna atanmıştır. Daha sonra *frd* [4] komutu ile *sistem* isminde *frekans-genlik(dB)* değerlerine bağlı bir matris formu elde edilmiştir.

```
[frekans,genlik] = ginput(16);
for i = 1:16
cevap(i) = 10^(genlik(i)/20);
end
sistem = frd(cevap,frekans);
```

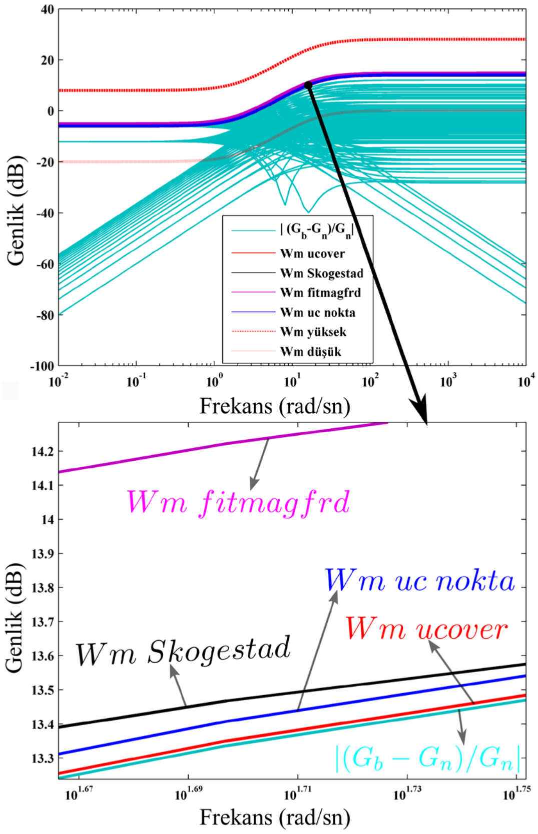
Elde edilen *sistem* yapısından sonra derecesinin kullanıcının belirlediği (bu çalışmada 1 alınmıştır) aşağıdaki şekilde verilen *fitmagfrd* komutu ile bir ağırlık fonksiyonu elde edilmiştir.

```
derece=1;
Wm_fit = fitmagfrd(sistem,derece);
tf(Wm_fit);
```

$$Wm\_fit = \frac{5.482\ s + 10.38}{s + 18.53} \qquad (18)$$

4.5. Yöntemlerin Karşılaştırılması

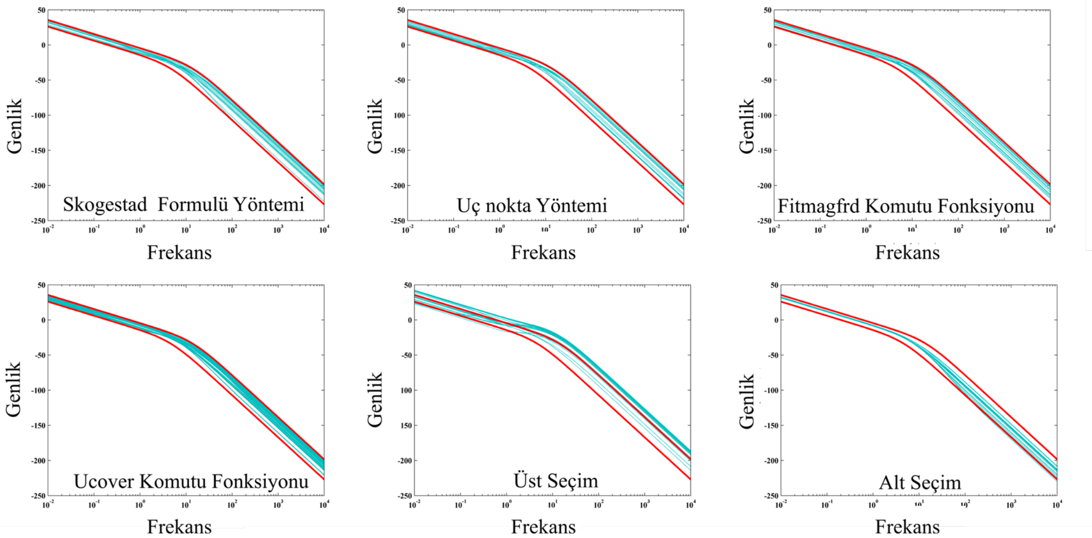
Çarpımsal belirsizlik modellenmesi için gerekli olan ağırlık fonksiyonunun belirlenmesi yöntemleri anlatılmış ve uygun ağırlık fonksiyonları elde edilmiştir. Elde edilen ağırlık fonksiyonları ile göreceli hatayı temsil eden belirsizlik ailesine sahip Bode zarfları frekans-genlik grafiğinde Şekil 5'te verilmiştir. Şekil 5 incelendiğinde tasarlanan tüm ağırlık fonksiyonları göreceli hata Bode zarflarının üzerinde olmaktadır. Dolayısıyla Denklem (3) ve Denklem (4) şartı sağlanmış olmaktadır. Yöntemler sonucunda elde edilen ağırlık fonksiyonları, göreceli hataların üst sınır noktasında yerleşmiştir. Ancak yakınlaştırma yapıldığında üst sınır noktasına en yakın olan sistemin *ucover fonksiyonu BD yöntemi* olduğu görülmüştür. Göreceli hata üst sınırına göre yakınlık olarak sıralanma yapıldığında *ucoverdan* sonra sırasıyla *uç nokta, Skogestad ve fitmagfrd* fonksiyonu BD yöntemleri olarak sıralandığı görülmüştür. Burada en iyi sonucu *ucover fonksiyonu* daha sonrasında önerilen *uç nokta yöntemi* vermiştir. *Skogestad yöntemi* önceki iki yöntemin gerisinde ancak *fitmagfrd* BD yönteminden daha iyi sonuç vermiştir. *Fitmagfrd BD yönteminin* yakınlaştırılmış görüntüde diğerlerinde daha üste yerleşmesinin sebebinin kullanıcının hassasiyetine bağlanmıştır. Kullanıcı nokta seçimi yaptığı için elde edilen ağırlık fonksiyonu tamamıyla kullanıcının hassasiyetine göre şekillenmektedir. En uygun ağırlık fonksiyonu, göreceli hatayı tüm frekanslarda en iyi kapsayan ağırlık fonksiyonu olarak seçilmektedir. Dolayısıyla incelenen yöntemlerin dışında göreceli hatanın çok çok üstünde ve altında Şekil 5'te de verildiği gibi birer ağırlık fonksiyonu tanımlanmıştır. Son olarak tüm yöntemlerden oluşan ağırlık fonksiyonları ile çok üst ve çok altta seçilen ağırlık fonksiyonları Denklem (12)'de yerine konularak çarpımsal belirsizlik modelleri oluşturulmuştur. Denklem (12)'den anlaşılacağı üzere her bir ağırlık fonksiyonu için farklı bir belirsizlik ailesi modeli meydana gelmektedir. Elde edilen bu modellerin incelenmesi için frekans-genlik eğrileri Şekil 6'da verilmiştir. Şekil 6 incelendiğinde kırmızı eğriler belirsizlik ailesinin frekans-genlik eğrisinde en yüksek ve en düşük sınır bölgeleridir. Yani maksimum ve minimum uç noktalar kullanılarak belirsizlik ailesinin maksimum ve minimum transfer fonksiyonlarının Bode zarflarını ifade etmektedir. Dolayısıyla belirsizlik modelinde ortaya çıkan tüm frekans-genlik eğrileri bu iki sınır arasında olmalıdır. Nitekim çeşitli yöntemlerle elde edilen ve Denklem (4) şartını sağlayan ağırlık fonksiyonları Şekil 6'da da gözüktüğü gibi sınır bölgeleri içerisindedir. Bu durum çarpımsal belirsizlik modelleri için tasarlanan ağırlık fonksiyonlarının uygun olduğu anlamına gelmektedir. Öyle ki, göreceli hatanın çok çok üstünde ve çok çok altında tasarlanan ağırlık fonksiyonları belirsizlik modelini tam karşılamamaktadır. Şekil 6'da gözüktüğü gibi *üst seçim* ağırlık fonksiyonuna sahip çarpımsal belirsizlik modeli bazı frekans değerlerinde sınır bölgeleri dışına taştığı ve sınır bölgelerinin içine doldurmadığı tespit edilmiştir. Bu durumdan anlaşılıyor ki çarpımsal belirsizlik modeli için gerekli olan ağırlık fonksiyonu, göreceli hata belirsizliğinin tüm frekans değerlerinde maksimum değerine yakın bir şekilde seçilmesini önermektedir. Aynı şekilde *alt seçim* ağırlık fonksiyonu Şekil 6'da da görüldüğü gibi göreceli hataların altında seçildiği için sınır bölgelerinin içerisinde kalmaktadır. Ancak sınır bölgesinin içini tam doldurmadığı için tüm belirsizlik ailesini temsil edememektedir.



Şekil 5: Göreceli hata transfer fonksiyonları ile ağırlık fonksiyonlarının Bode zarflarının gösterimi

5. Sonuçlar

Bu çalışmada çarpımsal belirsizliğin modellenmesi için gerekli olan ağırlık fonksiyonlarının oluşturulmasını sağlayan dört yöntem incelenmiştir. Bu yöntemlerden 3 tanesi (*Skogestad formülü yöntemi, Matlab/ucover fonksiyonu BD yöntemi, Matlab/fitmagfrd fonksiyonu BD yöntemi*) literatürde var olan yöntemlerdir. Diğer bir yöntem ise bu çalışmada önerilen uç nokta yöntemidir. Yöntemler tek tek incelenmiş ve ağırlık fonksiyonu oluşturulma adımları anlatılmıştır.



Şekil 6: Yöntemlerden elde edilen ağırlık fonksiyonlarına göre şekillenen çarpımsal belirsizlik modellerinin frekans-genlik eğrileri

Her yöntemin kendi içerisinde avantaj ve dezavantajlara sahip olduğu belirlenmiştir. Bilgisayar destekli olan *Matlab/ucover fonksiyonu yöntemi* belirsizlik ailesini normalize etmekte en başarılı yöntem olarak tespit edilmiştir. Ancak bu yöntemin uygulanması için iyi bir model tasarımı algoritması geliştirilmelidir. Aynı zamanda parametre sayısı, model derecesi ve parametrelerin aralık değerlerine bağlı olarak hesaplama süreleri çok zaman alıcı olduğu görülmüştür. *Matlab/fitmagfrd fonksiyonu BD yöntemi* belirsizlik ailesinin karmaşık frekans-genlik eğrisindeki üst zarfında genlik değişiminin şekline bağlı olarak kullanıcı tarafından istenilen noktada seçim yapmasını sağlaması bir avantajdır. Ancak kullanıcı seçtiği noktalarda hassasiyetle tıklama yapamaması bir dezavantajdır. Bu yöntem de *ucover* yöntemindeki gibi yine belirsizlik ailesinin frekans-genlik eğrilerinin çizilmesi için iyi bir modelleme algoritması gerektirmektedir. Yine sistem derecesi, belirsiz parametre sayısı ve aralığı için hesaplama yapma zorlaşmakta ve zaman almaktadır. *Skogestad formülü yöntemi* birinci dereceden bir transfer fonksiyonu olduğu, belirsizlik ailesinin sadece yüksek frekanstaki genlik değerine, düşük frekanstaki genlik değerine ve belirsizliğin %100'e ulaştığı frekans değerine bağlı olması sebebiyle her zaman göreceli hatayı tam kapsayan bir şekilde olamayabilecektir. Düşük dereceli sistemler için kullanılması uygundur. Ancak yüksek dereceli sistemlerde kullanılmasında belirsizliği tam normalize edemeye bilmektedir. Ancak yine de analitik bir yaklaşım sunmakta olan bir yapıdır. Bu bakış açısıyla bakıldığında bilgisayar destekli olmayan bir durumda kullanışlı olabilmektedir. Diğer bir yöntem olan ve bu çalışmadan önerilen *uç nokta yöntemi* yine bir analitik yöntem sunmaktadır. Bu durumda sistemin derecesi, parametre sayısı ve aralığı ne olursa olsun parametrelerin pay kısmının sadece maksimum değeri ile payda kısmının sadece minimum değerleri ile parametrelerin nominal değerleri alınarak tek bir transfer fonksiyonu oluşturulmak suretiyle bir ağırlık fonksiyonu oluşturulmaktadır. Böylelikle, *Skogestad yönteminin* model derecesi ve parametre sayısına bağlı olan dezavantajlı durumu bir başka analitik yöntem önerilerek literatüre katkı sağlanmıştır. Önerilen yöntem ile ayrıca *ucover* ve *fitmagfrd* fonksiyonlarının kullnıldığı BD yöntemleri için dezavantajlı olan ve modelleme için gerekli karmaşık algoritma oluşturulması ile zaman alıcı hesaplama yöntemlerinin önüne geçilmesi sağlanmış olur. Öyle ki bu komutların kullanılma aşamaları maksimum uç noktalar, minimum uç noktalar ve nominal değerler kullanılarak çok az bir hesaplama gerektiren ve zaman alıcı olmayan bir sürece çevrilebilir. Yani uç nokta yöntemi bilgisayar destekli yöntemler ile beraber de kullanılabilir. Böylelikle *ucover* ve *fitmagfrd* komutları kullanılırken ihtiyaç duyulan tüm göreceli hata transfer fonksiyonlarının Bode zarfları yerine sadece uç noktalar kullanılarak elde edilen birkaç tane transfer fonksiyonunun Bode zarflarının kullanılması yeterli olacaktır. Ancak bu birkaç tane transfer fonksiyonunun Bode zarflarının içerisinde maksimum ve minimum transfer fonksiyonlarının Bode zarfları kesinlikle olması gerekmektedir. Önerilen yöntem, parametrik belirsizlik durumlarının; çarpımsal belirsizlik, toplamsal vb. belirsizlik modellemelerinde uygundur. Bu çalışmada incelenen yöntemler, sistem derecesi düşük ve yalnızca üç tane parametre belirsizliğine sahip bir örnek üzerinden uygulaması yapılmıştır. Sistem derecesinin yüksek, parametre sayısının ve değer aralıklarının farklı olması gibi diğer durumlarda yöntemler adına izlenecek adımlar aynı kalacaktır. Ancak elde edilen ağırlık fonksiyonlarının etkinliği bu çalışmadan farklı olabilecektir. Dolayısıyla en uygun ağırlık fonksiyonun seçilmesi tamamıyla sistemin yapısına ve araştırmacının kabiliyetine bağlı olduğu düşünülmektedir.

6. Kaynaklar

[1] M. M. K. Da-Wei Gu, Petko H. Petkov, *Robust Control Design with MATLAB®*, 2nd ed. Springer London, 2013.

[2] P. H. Petkov, T. N. Slavov, and J. K. Kralev, *Design of Embedded Robust Control Systems Using MATLAB® / Simulink®*. Institution of Engr. and Tech, 2018.

[3] S. Skogestad and I. Postlethwaite, "Multivariable Feedback Control—Analysis and Design," *IEEE Control Syst.*, vol. 27, no. 1, pp. 80–81, 2007.

[4] G. Balas, R. Chiang, A. Packard, and M. Safonov, "Robust Control Toolbox ™ User ' s Guide," p. 210, 2016.

[5] N. Tan, "Computation of the frequency response of multilinear affine systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 47, no. 10, pp. 1691–1696, Oct. 2002.